Inspectoratul Şcolar al Judeţului Arad

Olimpiada de Matematică
Etapa pe centru- 18.02.2012
Barem de notare
Clasa a XII-a

1.

a) Arată că (A,) grup abelian* *4p*

b) Determină funcția $f(t) = \frac{1}{6} ln\frac{3+t}{3-t}$, $t \in (-3,3)$

1p

Arată că f este morfism *1p*

Arată că f este bijectivă *1p*

2.

Fie $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(3+x^2)(e^x+1)} dx$

Facem schimbarea de variabilă x=-t şi găsim

$I = \int_{-1}^{1} \frac{e^t}{(3+t^2)(e^t+1)} dt$ *2p*

$$2I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(3+x^2)(1+e^x)} dx + \int_{-1}^{1} \frac{e^x dx}{(3+x^2)(1+e^x)} dx$$

şi calculează 2I *4p*

Determină $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$ *1p*

3.

$f: G \to \mathbb{Z}_n$ $morfism \Rightarrow f(x^n) = \hat{o},\ \forall x \in G$ *2p*

Cum (m,n) = 1 => $\exists\ a, b\ \in \mathbb{Z}\ astfel$ încât $1 = am + bn$ *1p*

Cum f morfism => $f(x) = f((x^a)^n) + f((x^b)^m) = f((x^b)^m)$ *2p*

Cum $\{x^n | x \in G\}$=$\{x^m | x \in G\} \Rightarrow \exists\ y \in G\ astfel$ încât

$(x^b)^m = y^n, deci\ f((x^b)^m) = \hat{o}$ *1p*

Obținem $f(x) = \hat{o},\ \forall x \in G$ *1p*

Solutie alternativa

$a \in G \;=>\; \exists b \in G\; astfel$ încât $a^m = b^n$ *1p*

$f(a^m) = f(b^n) => \hat{m}f(a) = \hat{n}f(b) = \hat{o}$ *2p*

$(m,n) = 1 => \;\hat{m}\; inversabil$ în $inelul\; (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ *1p*

Obținem $f(a) = \hat{o}$ *2p*

Trage concluzia că singurul morfism este cel nul. *1p*

4.

Determină funcția $f(x) = \begin{cases} x-1 & dc \quad x \geq 1 \\ 1-x & dc \quad x \in (0,1) \\ 1 & dc \quad x = 0 \\ \cos x & dc \quad x < 0 \end{cases}$ *4p*

Arată că f este continuă pe $\mathbb{R}$ *2p*

Trage concluzia că f adminte primitive *1p*